ESERCITAZIONI DI ISTITUZIONI DI ANALISI COMPLESSA

10 OTTOBRE 2002

1. Funzione complessa di variabile complessa, limite, continuitá.

Esercizio 1.1. Determinare l'immagine del settore circolare

$$S = \{z : 0 < |z| < 1,\, 0 < \arg(z) < \pi/4\},$$

tramite la trasformazione $z \mapsto \log(2iz)$.

Esercizio 1.2. Determinare se i seguenti limiti esistono ed in caso positivo calcolarne il valore:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus 0}} \frac{e^z - 1}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus 0}} \frac{\sin|z|}{z}.$$

Esercizio 1.3. Si considerino le funzioni $f(z) = 1/(1-z)$ e $g(z) = 1/(1+z^2)$. Sono esse funzioni continue sul disco unitario $|z| < 1$? Sono uniformemente continue?

2. La derivata complessa, condizioni di Cauchy-Riemann, funzioni olomorfe.

Esercizio 2.1. Dimostrare che sono derivabili in senso complesso le seguenti funzioni e calcolare le loro derivate:

$$\begin{array}{lll}
z^n, \quad (n\in\mathbb{N}); & \dfrac{1}{z}, \quad (z\neq 0); & e^z; \\
\cos(z); & \sin(z); & \log(z), \quad (\arg(z)\in]-\pi,\pi[); \\
(z^{123}+1)^{987}; & \dfrac{\cos(z)}{e^{\sin(z)}}; & \dfrac{z^3+2z+1}{z^3+1}, \quad (z\neq -1, e^{\pm i\pi/3}).
\end{array}$$

Esercizio 2.2. Dimostrare che le funzioni $\overline{z}$, $|z|^2$, $\mathrm{Re}(z)$ non sono derivabili in senso complesso su nessun dominio di $\mathbb{C}$.

Esercizio 2.3. Su quale dominio di $\mathbb{C}$ è possibile definire la funzione $f(z) = \sqrt{z}$ in modo che sia olomorfa? E se $f(z) = \sqrt{z^2-1}$?

Esercizio 2.4. Determinare per quali costanti reali a, b, c, le seguenti funzioni sono derivabili in senso complesso.

$$z = x + iy \mapsto f(z) = x + ay + i(bx + cy),$$
$$z = x + iy \mapsto f(z) = x^2 + ay^2 + i(bxy + c).$$

Esercizio 2.5. Dimostrare che se una funzione di variabile complessa è derivabile in senso complesso in ogni punto di $\mathbb{C}$ ed assume solo valori reali allora è costante.

Esercizio 2.6. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $|f(z)| = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che f è una funzione costante. [suggerimento per cominciare: scrivendo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, l'ipotesi diventa $u^2 + v^2 = 1$, che differenziata rispetto ad x ed y ci dá ...]

Esercizio 2.7. Utilizzando le notazioni $z = \rho e^{i\theta}$ e $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$, scrivere le condizioni di Cauchy-Riemann per u e v in coordinate polari.

3. Funzioni armoniche

Esercizio 3.1. Sia $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa (x, y e u, v reali). Sia $(u, v) \mapsto h(u, v)$ una funzione armonica. Dimostrare che anche $(x, y) \mapsto g(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ è una funzione armonica.

Esercizio 3.2. Verificare che la funzione $u(x, y)$ è armonica, calcolare la funzione armoniche coniugata $v(x, y)$ e ricostruire la funzione olomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dove $z = x + iy$, sul dominio indicato:

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = x + xy, && (x,y) \in \mathbb{R}^2;\\
&u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, && (x,y) \neq (0,0);\\
&u(x,y) = \log(x^2+y^2), && (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\};\\
&u(x,y) = x^2 - y^2, && (x,y) \in \mathbb{R}^2;\\
&u(x,y) = \sin x \cdot \cosh y, && (x,y) \in \mathbb{R}^2;\\
&u(x,y) = e^x\left(x\cos y - y \sin y\right), && (x,y) \in \mathbb{R}^2;\\
&u(x,y) = 5x + y + x^2 - y^2 - \frac{y}{x^2+y^2}, && (x,y) \neq (0,0);\\
&u(x,y) = x - 2y + \log(x^2+y^2), && (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}.
\end{aligned}$$

4. Esercizi di riepilogo

Esercizio 4.1. Determinare un polinomio $v(x, y)$ nelle variabili x, y, in modo che la funzione $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia olomorfa su tutto il piano complesso, sapendo che $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ e che $f(i) = 2i$.

Esercizio 4.2.

- Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su un dominio Ω. Dimostrare che
$$\Delta\left|f(z)\right|^2 = 4\left|f'(z)\right|^2.$$
- Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni olomorfe sul dominio Ω tali che
$$\left|f(z)\right|^2 + \left|g(z)\right|^2 = 1,$$
per ogni $z \in \Omega$. Dimostrare che sia f che g sono funzioni costanti.

Esercizio 4.3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta:

(1) Se f è una funzione olomorfa allora f è una funzione continua.
(2) Se $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{C}$ e u e v sono due funzioni differenziabili su $\mathbb{R}^2$ allora f è una funzione olomorfa.
(3) Se $f(z)$ è una funzione olomorfa, anche $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ è una funzione olomorfa.
(4) Sia $f(z)$ una funzione olomorfa. Se $\mathrm{Re}(f(z)^2) = 0$ per ogni z allora f è una funzione costante.
(5) Sia $f(z)$ una funzione olomorfa. Se $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(z))$ per ogni z allora f è una funzione costante.
(6) Se $p(x, y)$ è un polinomio con coefficienti complessi nelle due variabili reali x e y, allora la funzione $f(z) = p(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ è una funzione olomorfa.
(7) La funzione $z \mapsto z^{1/2}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(8) La funzione $z \mapsto \sqrt{z-1}$ può essere definita in modo olomorfo in un intorno di 0.